

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Introduction

On connaît des propriétés des ensembles suivants :

- $\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$: L'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$: L'ensemble des nombres rationnels
- $\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels
- $\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes.

☉ Un nombre rationnel est un nombre dont la partie décimale est finie, ou infinie et périodique.

Exemple 1

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{7} \dots$$

☉ Les nombres irrationnels sont des nombres qui ne peuvent pas se mettre sous la forme de $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

Exemple 2

$$\pi; e; \sqrt{3} \dots$$

☉ Un nombre irrationnel est un nombre dont la partie décimale est infinie et non périodique.

1.2 Les nombres réels

Définition 1

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels forment **l'ensemble des nombres réels**. On le note $\mathbb{R}$

On définit sur $\mathbb{R}$ deux opérations internes notées **addition(+)** et **la multiplication (×)** (× ou .) et une relation d'ordre notée : **Inférieur ou égales (≤)**.

1.3 Propriétés sur $\mathbb{R}$

Propriété 1

- $i_1)$ $+$ est **associative** $\forall a$ et b et $c \in \mathbb{R}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- $i_2)$ $+$ est **commutative** $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.
- $i_3)$ $+$ admet un **élément neutre qui est 0** $\forall a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$.
- $i_4)$ tout élément de $\mathbb{R}$ admet un **opposé noté $(-a)$** appartenant à $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $-a \in \mathbb{R}$, $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Propriété 2

- $j_1)$ $\cdot$ est **associative** $\forall a$ et b et $c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- $j_2)$ $\cdot$ est **commutative** $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- $j_3)$ $\cdot$ est **distributive par rapport à $+$** et on a : $\forall a$ et b et $c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- $j_4)$ tout élément de $\mathbb{R}^*$ admet un **inverse noté $\frac{1}{a} = a^{-1} \in \mathbb{R}$** et $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = a^{-1} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.
- $j_5)$ $\cdot$ admet un **élément neutre qui est 1** $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Propriété 3

- $k_1)$ $\leq$ est **réflexive** $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$.
- $k_2)$ $\leq$ est **antisymétrique** $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$.
- $k_3)$ $\leq$ est **transitive** $\forall a$ et b et $c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.
- $k_4)$ $\leq$ est une **relation d'ordre total** : deux éléments de $\mathbb{R}$ sont forcément comparables, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

1.4 Borne inférieure-Borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (A est une partie non vide de $\mathbb{R}$); et $x \in \mathbb{R}$.

⊛ On dit que x est un **majorant de A** si et seulement si et seulement si $\forall a \in A$ on a : $a \leq x$.

⊛ On dit que x est un **minorant de A** si et seulement si et seulement si $\forall a \in A$ on a : $x \leq a$.

Exemple 3

Soit $I =]0; 2[$, 4; 3 sont des **majorants** de I
0 est un **minorant** de I ; -1 aussi.

✪ x est le plus grand élément de A (plus petit élément de A) si et seulement si :

$$*x \in A \text{ et}$$

$*x$ est un **majorant** (**minorant** de A)

Cet élément est unique. On l'appelle aussi **maximum** de A (**minimum** de A). On le note $\max(A)$ [$\min(A)$].

Exemple 4

Soit $J =]-1; 0]$

$\max(J) = 0$, $\min(J)$ n'existe pas.

Remarque 1

★ On dit d'un ensemble qu'il est majoré (resp. minoré) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si celui-ci admet un majorant (resp. minorant).

★ On dit d'un ensemble qu'il est borné si et seulement si il est à la fois majoré et minoré.

♠ Caractérisation

★ Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée admet une **borne supérieure**. S'il existe, cet élément est noté $\sup(A)$.

Exemple 5

Soit $A =]-2; 3[$;

$\sup(A) = 3$

La borne supérieure représente le plus petit des majorants.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Pour que $M = \sup(A)$ il faut et il suffit que :

$$i_1) \quad \forall x \in A, x \leq M$$

$$i_2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } a > M - \varepsilon$$

★ Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minorée admet une **borne inférieure**. S'il existe, cet élément est noté $\inf(A)$.

La borne inférieure représente le plus grand des minorants.

Exemple 6

Soit $A =]1; 2]$;

$\inf(A) = 1$

1.5 Voisinage

Définition 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **voisinage de x_0** tout intervalle ouvert d'amplitude très petit et centré sur x_0 .

Le voisinage de x_0 se note $V(x_0) =]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ où ε est une quantité infinitésimale.

Exemple 7

$] -0,00000001; 0.00000001[$ est un voisinage de 0

La notation $x \rightarrow x_0$ représente le voisinage de x_0 .

★ On appelle **voisinage pointé de x_0** , le voisinage x_0 privé de x_0 lui même. Il est noté $\dot{V}(x_0) = V(x_0) - \{x_0\}$.

Remarque 2

$V(+\infty) =]A; +\infty[$ où A est une quantité très grande.

